山脇の超数学講座 No. 22

3次方程式の解の公式 2

□ 虚数を認めることによって，3次方程式の解が確定した

前回，3次方程式の解の公式を求めることが，**虚数の誕生**に大きな役割を果たしたことを述べた。そして，まだ不十分な点が残っているので，次回に続く，とした。一体それは何だったのか？　式の番号は前回から引き継いでいる。前回を参照するためには，以下の URL でホームページを見てほしい。

http://shs-kyotogakuen.com/educational/course/advanced/8071.php

タルタリアーカルダノの公式には問題が残っていた。公式では，実数解1個，虚数解2個の3次方程式は説明できても，2個以上の実数解をもつ3次方程式の説明ができなかったのである。

たとえば，　$x^3-15x-4=0$ …⑮という3次方程式は，　$x=4$，　$-2\pm\sqrt{3}$　という3つの実数解をもつ。　[　$x^3-15x-4=0 \iff (x-4)(x+2+\sqrt{3})(x+2-\sqrt{3})=0$　]

$$\boxed{x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}} \cdots\cdots ⑬$$

⑮で⑬を適用すると，　$x=\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}}$ となって，虚数が含まれており，もはやこの先は計算できないように見える。

そこでさらに研究を進めたのが，イタリア･ボローニャ生まれの数学者ラファエル･ボンベリ（1526～1572）であった。彼は，$(2+\sqrt{-1})$ を3乗すると $(2+11\sqrt{-1})$ になり，$(2-\sqrt{-1})$ を3乗すると $(2-11\sqrt{-1})$ になることを突きとめたのである。つまり，解に含まれる3乗根を外すことができ，　$x=(2+\sqrt{-1})+(2-\sqrt{-1})=4$ となる。ボンベリは，解に含まれる虚数が場合によっては消え去り，実数だけの解に直せることを示したのである。

現在では，$(2+\sqrt{-1})^3=(2+i)^3=2^3+3\cdot2^2i+3\cdot2i^2+i^3=8-6+12i-i=2+11i$，

$(2-\sqrt{-1})^3=(2-i)^3=(\overline{2+i})^3=\overline{(2+i)^3}=\overline{2+11i}=2-11i$　と，　i を用いて簡単に説明できる。

$$\boxed{x=\frac{y+z}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}(y-z)i} \cdots\cdots ⑭$$

また，⑮の方程式で⑭を適用すると，　$x=-2\pm\sqrt{3}$　になるということである。したがって，ある種の3次方程式では，虚数の計算を利用することで，実数の解にたどりつくことができる。

2次方程式の解の公式　$ax^2+bx+c=0 \iff x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$　においては，

$\sqrt{\ }$ の中，b^2-4ac が負の数であっても，「解はない」として処理できたが，3次方程式においては，虚数の存在を認めなければ実数の解すら求められないことがわかってきたのである。

こうしてカルダノはしぶしぶ虚数を認めたが，フランスの数学者**ルネ・デカルト**（1596～1650）は $\sqrt{-1}$ を「想像上の数（imaginary number）」と名づけた。さらに虚数単位を「i」と定めたのは，スイスの数学者**レオンハルト・オイラー**（1707～1783）である。i の登場で虚数の計算は格段におこないやすくなった。

現在，現代科学や物理学において，虚数はなくてはならない存在となっている。たとえばミクロの世界の現象を記述する「量子力学」の基本方程式には虚数が含まれている。

□ タルタリアとカルダノの確執

ニッコロ・フォンタナ・タルタリア

16世紀のイタリアの数学者たちは，公開の場でたがいに問題を出し合って優劣を決する「**数学勝負**」をさかんにおこなっていた。これはルネサンスによる文化の興隆がもたらしたものである。数学の問題を解く能力が，武術や音楽と同様，人々を驚嘆させる大いなる徳として，賞賛の的になっていたのだ。また，都市共和国，小君主国の対立・権力抗争も背景にある。さらに，中世の騎士の馬上試合に代表される騎士道精神のなごりを見ることもできる。

1535年に**タルタリア**（1499～1557）は，「数学勝負」を，アントニオ・フィオール（生没年不詳）とすることになった。30題ずつの問題を出しあい，50日間でより多くの問題を解いた方が勝ちという約束であった。タルタリアはフィオールが出す問題の中の3**次方程式**を大胆に予想し，試合期日の10日前に，$x^3+px+q=0$　（p，q は定数）　の形の3次方程式の解を発見した。そのおかげで，数学試合の当日に，タルタリアはフィオールの出した問題をわずか2時間で全部解いてしまった。一方，フィオールはタルタリアの問題を1問も解くことができなかったといわれている。

タルタリアは，自分の求めた3次方程式の解法を世間に発表しなかった。貧しかった彼の中では，また次の「数学勝負」に勝つことが優先されたのである。

タルタリアのうわさを聞いて，3次方程式の解法を教えてほしいと頼んでくる人が相次いだ。**ジェロラモ・カルダノ**（1501～1576）もその一人であった。タルタリアは，「自分が本を書いて公表するまでは，決して他人には教えないこと」を条件として，とうとう解法をカルダノに明かしてしまった。

ところが，カルダノはその約束を破り，1545年に出版した『**アルス・マグナ**（大いなる技法）』という本の中で，3次方程式の一般的解法を発表してしまった。そのため3次方程式の解の公式は，「**カルダノの公式**」と呼ばれるようになった。一方，約束を無視されたタルタリアは，カルダノに対して激怒した。カルダノにも言い分はあったのだが……。

この続きは次回とします。次回は，3次以上の「高次方程式」について考えます。